512.924
F82s

SUR LA

MÉTHODE D'APPROXIMATION

DE NEWTON

PAR M. G. FOURET,
EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class ~~512.22~~ 512.924
Book F82s
Volume

Ja 09-20M

NOTICE: **Return or renew all Library Materials! The *Minimum* Fee for each Lost Book is $50.00.**

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.
To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

JUN 0 8 REC'D

NOV 0 8 REC'D

L161—O-1096

SUR LA

MÉTHODE D'APPROXIMATION

DE NEWTON.

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. IX; novembre et décembre 1890.

SUR LA

MÉTHODE D'APPROXIMATION

DE NEWTON

PAR M. G. FOURET,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1891

(Tous droits réservés.)

512.924
~~512.22~~
F82s

10 My 11 RBM

SUR LA

MÉTHODE D'APPROXIMATION

DE NEWTON.

1. L'application de la méthode si ingénieuse et si simple, imaginée par Newton, pour calculer par approximations successives les racines des équations, s'est pendant longtemps heurtée à une sérieuse difficulté, consistant en ce que les résultats qu'on en déduisait pouvaient, suivant les cas, s'approcher ou s'éloigner de la racine cherchée. Il était donc indispensable d'en régulariser l'usage, en précisant les conditions dans lesquelles on peut l'employer utilement et à coup sûr. Fourier [1] a résolu la question, en indiquant un ensemble de caractères auxquels, dans chaque cas, on reconnait d'avance que la méthode de Newton fournira une suite de valeurs s'approchant de plus en plus de la racine et dans le même sens. La règle de Fourier peut s'énoncer ainsi :

Étant donnée une équation

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dont une racine réelle et une seule est comprise entre les deux nombres réels a et b, pour que la méthode de Newton permette de calculer sûrement et régulièrement

[1] *Bulletin de la Société philomathique de Paris,* année 1818, p. 61 à 67. *Analyse des équations déterminées* (1831), p. 157 à 220.

Special Mathematics, 23 Feb 09 Hasbrouck 30

131507

cette racine par approximations successives, il suffit que les deux premières dérivées de $f(x)$ ne s'annulent pour aucune valeur de x, dans l'intervalle limité par a et b.

La formule de correction s'applique alors à celle des deux limites qui, substituée à x dans $f(x)$ et $f''(x)$, donne des résultats de même signe.

2. Cette règle est précise, mais elle a l'inconvénient d'être trop restrictive. La condition qu'elle impose à $f'(x)$ de ne pas s'annuler, dans l'intervalle qui comprend la racine, n'a pas sa raison d'être, et a disparu de l'exposé que l'on donne généralement aujourd'hui de la méthode de Newton [1]. Cette restriction n'est pas d'ailleurs la seule qui soit superflue, et comme il importe de laisser à un procédé de calcul aussi précieux le plus vaste champ d'applications possible, nous allons chercher *quelles sont les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour que, en partant d'une valeur plus ou moins approchée d'une racine d'une équation, on obtienne, par l'application répétée de la méthode de Newton, une suite de valeurs s'approchant de plus en plus de cette racine, et toujours dans le même sens.*

Nous arriverons à cette conclusion : *L'équation à résoudre étant écrite sous la forme de l'équation* (1), *il faut et il suffit que la substitution de la valeur initiale dans $f(x)$ et $f''(x)$ donne des résultats de même signe, et que $f''(x)$ ne change pas de signe, lorsque x varie de cette valeur à la racine cherchée* [2].

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII (1869), p. 17 à 27 : *Sur la méthode d'approximation de Newton*, par M. Darboux.

(2) En publiant la présente Note, je n'ai aucunement la prétention de revendiquer la priorité des idées qui y sont exposées. Mon seul but est de contribuer à répandre, au sujet de la méthode d'approximation de Newton, des notions plus larges, et d'ailleurs tout

Si donc, a et b étant deux limites qui comprennent la racine cherchée α, les conditions que nous venons d'indiquer sont remplies pour l'une des limites a, la correction de Newton sera applicable aux valeurs de x comprises entre a et α, lors même que $f(x)$, $f'(x)$ ou $f''(x)$ s'annuleraient, quand x varie de α à b. On remarquera notamment que la racine cherchée peut être indifféremment simple ou multiple, et qu'il n'est pas absolument indispensable d'en avoir opéré préalablement la séparation. En écartant ces restrictions théoriquement inutiles, on évitera, dans bien des cas, des difficultés souvent insurmontables au point de vue pratique, consistant à débarrasser une équation telle que (1) de ses racines multiples, et de trouver, pour chaque racine simple de cette équation, un intervalle qui n'en renferme pas d'autre, et dans lequel $f''(x)$ ne change pas de signe.

3. Soit

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

une équation, algébrique ou transcendante, à coefficients réels.

Supposons que, pour les valeurs de x variant de a à α inclusivement, la fonction $f(x)$ et ses deux premières dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ soient bien déterminées, et qu'en outre $f(x)$ et $f'(x)$ soient continues. On a, d'après la formule de Taylor, pour toute valeur de x comprise dans cet intervalle

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(z),$$

---

aussi précises que celles qui ont généralement cours dans l'enseignement.

z désignant un nombre, variable avec x, compris entre a et x. On conclut de là, $f(\alpha)$ étant nul par hypothèse,

$$f(a) + (\alpha - a) f'(a) + \frac{(\alpha - a)^2}{2} f''(\zeta) = 0,$$

ζ étant un nombre compris entre a et α, mais dont on ignore la valeur.

Supposons

$$f'(a) \neq 0.$$

De la dernière relation on déduit

$$(2) \qquad \alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(\alpha - a)^2}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(a)}.$$

La méthode d'approximation de Newton consiste à prendre pour nouvelle valeur approchée de la racine cherchée

$$(3) \qquad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Cherchons à quelles conditions le nombre a_1 sera plus approché que a de la racine α.

Deux hypothèses sont à distinguer : a peut être inférieur ou supérieur à α. Nous raisonnerons, en supposant $a < \alpha$. Le cas où l'on aurait $a > \alpha$ se traiterait d'une manière toute semblable et conduirait aux mêmes conclusions. Nous montrerons d'ailleurs comment, par un artifice bien simple, on ramène ce second cas au premier.

Pour que a_1 diffère moins de α que a, il faut évidemment tout d'abord que a_1 soit supérieur à a, et par conséquent, d'après la relation (3), que $f(a)$ et $f'(a)$ aient des signes contraires, c'est-à-dire que l'on ait

$$(4) \qquad f(a) f'(a) < 0.$$

Cette condition est nécessaire; mais elle ne suffit

pas pour que la méthode de Newton s'emploie avec avantage. Il pourrait arriver en effet, la condition (4) étant cependant remplie, que a_1 surpassât α, et à tel point que $a_1 - \alpha$ fût supérieur à $\alpha - a$. C'est ce qui aurait lieu si, dans la relation (2), la valeur de $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ était positive et suffisamment grande. En pareil cas a_1 serait moins approché de α par excès que ne l'est a par défaut, et, en appliquant la méthode de Newton, on s'éloignerait du but à atteindre. D'ailleurs, en raison de l'incertitude relative à la valeur absolue de $f''(\zeta)$, on ne voit pas, dans le cas ou $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ serait positif, comment on reconnaîtrait que le nombre $\frac{(\alpha - a)^2}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ est assez petit pour que $a_1 - \alpha$ soit inférieur à $\alpha - a$. Il s'ensuit que l'on ne pourra employer la méthode de Newton en toute sûreté qu'autant que $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ sera négatif. Mais le signe de $f''(\zeta)$ sera inconnu, toutes les fois que $f''(x)$ changera de signe pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre a et α. De là résulte la nécessité de limiter l'usage de la méthode aux cas où $f''(x)$ conserve le même signe dans l'intervalle de a à α, c'est-à-dire au cas où cet intervalle ne comprend aucune racine, ou tout au moins ne renferme que des racines d'un ordre pair de multiplicité de l'équation

$$f''(x) = 0.$$

Dans cette hypothèse, $f''(\zeta)$ ayant le même signe que $f''(a)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ soit négatif peut s'écrire

$$f'(a) f''(a) < 0. \tag{5}$$

Comparons les inégalités (4) et (5) : on voit que, pour

qu'elles soient vérifiées, il faut et il suffit : 1° que $f(a)$ et $f''(a)$ aient le même signe ; 2° que $f'(a)$ ne soit pas nul et ait un signe différent.

4. On peut voir d'ailleurs que les conditions relatives à $f'(x)$ sont une conséquence de celles qui doivent être remplies par $f(x)$ et $f''(x)$. C'est ce qui résultera de la proposition suivante que nous allons démontrer :

Si $f''(x)$ a le même signe que $f(x)$, pour $x = a$, et conserve ce signe pour toutes les valeurs de x comprises entre a et α, la dérivée $f'(x)$ ne s'annule pour aucune de ces valeurs intermédiaires, ni pour $x = a$, et le signe constant, dont elle est affectée dans l'intervalle, est différent du signe de $f(x)$ et de $f''(x)$.

En effet, quand x croît de a à α, la fonction $f'(x)$ varie constamment dans le même sens, puisque sa dérivée $f''(x)$ ne change pas de signe. Il ne saurait en conséquence exister entre a et α plus d'une valeur de x annulant $f'(x)$. D'ailleurs, on peut toujours choisir un nombre η assez petit, pour que l'équation

$$f'(x) = 0 \tag{6}$$

n'ait pas de racine entre $x = \alpha - \eta$ et $x = \alpha$, et pour que l'on ait par conséquent [1]

$$f(\alpha - \eta) f'(\alpha - \eta) < 0, \tag{7}$$

---

[1] Nous avons recours ici à une double propriété bien connue et souvent utilisée des fonctions, qui consiste en ce que, *dans les intervalles pour lesquels une fonction est continue et bien déterminée ainsi que sa dérivée $f'(x)$, un nombre substitué à x dans $f(x)$ et $f'(x)$ donne des résultats de signes contraires (de même signe), si entre ce nombre et la racine de $f(x) = 0$, qui lui est immédiatement supérieure (inférieure), il n'y a pas de racine de $f'(x) = 0$, ou s'il en existe un nombre pair.*

Mais $f''(\alpha - \eta)$ et $f(\alpha - \eta)$ ayant, par hypothèse, le même signe, on déduit de l'inégalité précédente

$$f'(\alpha - \eta) f''(\alpha - \eta) < 0,$$

et cette inégalité indique qu'il ne saurait y avoir de racine de l'équation (6) entre $\alpha - \eta$ et la plus grande des racines simples, ou d'un ordre impair de multiplicité, inférieures à ce nombre, que peut admettre l'équation $f''(x) = 0$, c'est-à-dire, en définitive et *a fortiori*, entre $\alpha - \eta$ et a inclusivement.

La dérivée $f'(x)$ ne s'annule donc ni pour $x = a$, ni pour aucune valeur de x comprise entre a et α. Par suite $f'(x)$ a un signe invariable, pour toutes ces valeurs de x, et ce signe, d'après l'inégalité (7), est différent de celui de $f(\alpha - \eta)$, c'est-à-dire du signe commun à $f(a)$ et à $f''(a)$. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

5. Nous avons raisonné dans l'hypothèse où a est inférieur à α. Il est facile d'étendre les conclusions de notre raisonnement au cas où a serait supérieur à α. Considérons dans ce but l'équation

$$(8) \qquad g(y) \equiv f(-y) = 0.$$

Elle admet la racine $y = -\alpha$, et comme, par hypothèse, $-a$ est inférieur à $-\alpha$, nous pouvons appliquer à la nouvelle équation les conclusions auxquelles nous sommes arrivé précédement, c'est-à-dire que l'on pourra appliquer avantageusement, et en toute sûreté, la correction de Newton à la valeur approchée $-a$, si $g(-a)$ et $g''(-a)$ ont le même signe, et si $g(y)$ ne change pas de signe, quand y varie de $-a$ à $-\alpha$. On obtiendra ainsi une nouvelle valeur de la racine $-a_1$, plus

approchée que $-a$, et dans le même sens, à savoir

$$-a_1 = -a - \frac{g(-a)}{g'(-a)}.$$

Or on déduit de là

$$(3) \qquad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

en remarquant que l'on a

$$g(-a) \equiv f(a), \qquad g'(-a) \equiv -f'(a).$$

Par suite le nombre a_1, donné par la formule (3), et compris entre a et α, puisque $-a_1$ est compris entre $-a$ et $-\alpha$, sera une valeur approximative de la racine α de l'équation (1), plus approchée que a et dans le même sens.

D'ailleurs, en remarquant que l'on a

$$g''(y) \equiv f''(-y),$$

on voit que dans le second cas ($a > \alpha$) comme dans le premier ($a < \alpha$), les conditions d'application de la méthode d'approximation sont que $f(a)$ et $f''(a)$ aient le même signe, et que $f''(x)$ ne change pas de signe, quand x variera de a à α.

6. Nous pouvons donc énoncer, dans toute sa généralité, la règle suivante [1] :

Si le nombre a est une première valeur approximative d'une racine α de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

---

[1] Il est facile d'interpréter géométriquement le résultat auquel nous sommes parvenu : nous laissons ce détail de côté.

le nombre

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \tag{3}$$

sera une nouvelle valeur approximative de la même racine, plus approchée que la première, et dans le même sens, toutes les fois que $f(a)$ et $f''(a)$ auront le même signe, et que $f''(x)$ ne changera pas de signe, quand x variera de a à la racine cherchée α [1].

Après avoir calculé le nombre a_1 par défaut, on en déduira, par la même méthode, un nouveau nombre

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

plus approché que a_1 de la racine cherchée, et dans le même sens, et, en continuant ainsi, on obtiendra une suite de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ s'approchant de plus en plus, et dans le même sens, de la racine cherchée.

Remarquons en effet que les résultats de la substitution de l'un quelconque de ces nombres dans $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe, à savoir le signe commun à $f(a)$ et à $f''(a)$. D'ailleurs $f''(x)$ conservant le même signe, quand x varie de ce nombre à α, chacun des nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ remplit bien les conditions requises pour s'approcher de la racine cherchée plus que celui qui le précède, et dans le même sens que lui.

7. *Convergence des résultats obtenus.* — Il est facile de démontrer que la suite des nombres $a, a_1, a_2, \ldots,$

---

[1] Il est bien clair que nous aurions pu établir cette règle par une voie plus courte; mais nous n'aurions pas atteint le but que nous nous étions fixé, qui était de trouver quelles sont les conditions, aussi peu restrictives que possible, dans lesquelles la méthode de Newton peut s'appliquer.

a_n, a_{n+1}, ... obtenus au moyen de la formule (3) a pour limite la racine α, et que l'on peut, en conséquence, par la méthode de Newton, approcher, autant qu'on le veut, de la valeur exacte de cette racine.

En effet, les nombres a, a_1, a_2, ... a_n, a_{n+1}, ... forment une suite de nombres croissants et inférieurs à α, ou bien une suite de nombres décroissants et supérieurs à α. Par suite, dans un cas comme dans l'autre, ils tendent vers une limite λ.

On a d'ailleurs, d'une manière générale,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

On tire de là

$$-f(a_n) = (a_{n+1} - a_n) f'(a_n).$$

La valeur absolue de $f(a_n)$ sera moindre qu'un nombre positif δ, choisi aussi petit que l'on veut, si l'on a

$$\operatorname{mod} f'(a_n) \operatorname{mod}(a_{n+1} - a_n) < \delta,$$

et, *a fortiori*,

$$\mu \operatorname{mod}(a_{n+1} - a_n) < \delta,$$

μ désignant la plus grande valeur absolue que prenne $f'(x)$, quand x varie de a à α, c'est-à-dire la valeur absolue de $f'(a)$, puisque, en vertu des hypothèses, la valeur absolue de $f'(x)$ décroît constamment dans l'intervalle considéré.

Or la dernière inégalité peut s'écrire

$$\operatorname{mod}(a_{n-1} - a_n) < \frac{\delta}{\mu},$$

et, en raison même de l'existence de la limite λ, on peut choisir l'entier n, de façon que la valeur absolue de la différence $a_{n+1} - a_n$ soit moindre que toute quantité donnée. La suite des nombres $f(a)$, $f(a_1)$, $f(a_2)$, ...,

$f(a_n)$, $f(a_{n+1})$, ... a donc pour limite zéro, et par conséquent la suite a, a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ... a pour limite la racine cherchée α.

8. *Limite de l'erreur afférente à la correction de Newton.* — D'après la relation (2), on a

$$\alpha - a_{n+1} = \alpha - a_n + \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = -\frac{(\alpha - a_n)^2}{2}\frac{f''(\zeta_n)}{f'(a_n)},$$

ζ_n étant un nombre compris entre a_n et α.

Pour avoir une limite supérieure de l'erreur commise, en prenant a_{n+1} comme valeur approchée de la racine α, remplaçons, dans $\frac{(\alpha - a_n)^2}{2}\frac{f''(\zeta_n)}{f'(a_n)}$, $f'(a_n)$ et $f''(\zeta_n)$ respectivement par un nombre m inférieur à la plus petite des valeurs absolues que prend $f'(x)$ [1], et par un nombre M égal ou supérieur à la plus grande des valeurs absolues que prend $f''(x)$, quand x varie de a à α inclusivement. Pour obtenir des limites supérieures ε_1, ε_2, ..., ε_n, ε_{n+1}, ... des erreurs commises en prenant respectivement a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ... comme valeurs approchées de la racine α, on fera usage de la relation

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{M}{2m}\varepsilon_n^2,$$

que l'on peut écrire

$$\varepsilon_{n+1} = k\varepsilon_n^2, \tag{9}$$

en désignant par k un nombre positif, que l'on calculera une fois pour toutes, et qui ne changera pas, quand on évaluera successivement ε_1, ε_2, ..., ε_n, ε_{n+1}, ... On

---

[1] La plus petite de ces valeurs absolues correspond, en vertu des hypothèses, à $x = \alpha$.

aura en particulier pour commencer

$$\varepsilon_1 = k\varepsilon^2, \tag{10}$$

ε étant une limite supérieure de l'erreur commise, en considérant a comme valeur approchée de α.

9. On n'applique habituellement la méthode d'approximation de Newton au calcul d'une racine α d'une équation $f(x) = 0$ qu'après avoir séparé cette racine, c'est-à-dire après avoir trouvé deux nombres a et b qui la comprennent et n'en comprennent pas d'autre. Supposons cette opération préliminaire effectuée. Si l'on a constaté de plus que $f''(x)$ ne change pas de signe, quand x varie d'une manière continue de a à b, il est évident qu'il y aura nécessairement une de ces valeurs limites qui, substituée à x dans $f(x)$ et $f''(x)$, donnera des résultats de même signe. Les conditions précédemment établies (§ 6) étant remplies, en appliquant la correction de Newton à cette limite, on sera certain d'en déduire une nouvelle valeur de la racine, plus approchée, et dans le même sens, que celle dont on sera parti. Telles sont les circonstances les plus ordinaires dans lesquelles on emploie la méthode de Newton. Voyons comment on peut en étendre l'usage.

1° Supposons que l'on sache qu'entre deux nombres a et b se trouvent deux racines α et β de l'équation à résoudre. Il sera souvent difficile, dans le cas où α et β différeront très peu, de séparer ces racines. Mais, en pareil cas, on pourra sans inconvénient se dispenser de cette recherche. Supposons que les nombres a, α, β, b se succèdent par ordre de grandeurs croissantes. Après avoir reconnu, par exemple, que $f(a)$ et $f''(a)$ ont le même signe, il suffira de constater que $f''(x)$ ne change pas de signe, lorsque x varie de a à α. En effet, on pourra dès

lors appliquer, en toute sûreté, la correction de Newton à la limite a (§ 6) et approcher autant qu'on le voudra de la racine α, en se rendant compte du degré d'approximation obtenu, à l'aide des formules (9) et (10). Il pourra même arriver fréquemment que, pour des raisons analogues à celles que nous venons d'indiquer, la méthode de Newton soit en même temps applicable à la seconde limite b, et permette de calculer la racine β par approximations successives.

2° Il n'est pas nécessaire que la racine, pour laquelle on applique la méthode de Newton, soit simple : elle peut être double, triple, et généralement d'un ordre de multiplicité quelconque, pourvu que les conditions énoncées plus haut (§ 6) soient remplies relativement à la valeur approchée de cette racine, qui sert de point de départ dans le calcul. Il arrivera même souvent, lorsqu'une pareille racine sera séparée, que l'on pourra appliquer la correction de Newton à chacune des deux limites.

10. En un mot, étant donnée une équation $f(x) = 0$, pour appliquer utilement et sûrement la méthode d'approximation de Newton au calcul d'une de ses racines, que l'on sait être comprise entre deux nombres a et b, non seulement il sera toujours inutile, contrairement à ce qui est encore prescrit par quelques auteurs, de constater préalablement que $f'(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle; mais, toutes les fois que l'on pourra s'assurer que les conditions énoncées plus haut (§ 6) sont remplies pour l'une des limites a et b, il sera absolument indifférent que la racine cherchée soit simple ou multiple, que l'intervalle (a, b) contienne une ou plusieurs autres racines, enfin que la dérivée seconde s'annule pour une ou plusieurs valeurs de x comprises

entre la racine cherchée et celle des deux limites à laquelle on n'applique pas la correction de Newton. Cette correction, appliquée à l'autre limite, donnera, avec l'approximation que l'on voudra, celle des racines, contenues dans l'intervalle (a, b), qui diffère le moins de cette limite.

Il ne faut pas se dissimuler toutefois que l'emploi de la méthode de Newton, dans les conditions que nous avons fait connaître (§ 6), pourra, dans certains cas, rencontrer une difficulté sérieuse, provenant de la nécessité de s'assurer que $f''(x)$ ne change pas de signe, pour les valeurs comprises entre la racine que l'on ne connaît pas et la valeur approchée de cette racine, qui doit servir de point de départ au calcul. Nous allons montrer, sur quelques exemples, comment on pourra, dans bien des cas, résoudre la difficulté que nous venons de signaler.

11. *Premier exemple.* — Lorsqu'une équation algébrique entière a toutes ses racines réelles, on peut appliquer en toute sûreté la correction de Newton à une limite supérieure des racines, pour calculer la plus grande de ces racines [1]. Les approximations pourront d'ailleurs converger aussi rapidement que l'on voudra, puisque l'on peut dans ce cas, comme chacun sait, déterminer, d'après une règle due à Newton, une limite supérieure des racines, différant, aussi peu qu'on le veut, de la plus grande d'entre elles.

Lorsqu'une équation algébrique entière a toutes ses racines réelles, on peut également appliquer, avec un avantage certain, la méthode d'approximation de Newton au calcul de la plus petite racine, en partant d'une limite inférieure des racines [1].

---

[1] On trouvera la démonstration de cette question dans les *Leçons d'Algèbre* de M. Amigues, p. 515.

12. *Second exemple.* — Soit

$$f(x) = 0. \tag{11}$$

une équation algébrique entière, dont le premier membre, supposé ordonné, est de la forme

$$f(x) \equiv \varphi(x) - \psi(x);$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignent des polynômes entiers, dont tous les termes sont positifs.

L'équation (11), ainsi écrite, ne présentant qu'une variation, n'admet qu'une racine positive. Soit α cette racine. Lorsque x croît à partir de α, la fonction $f(x)$ est constamment croissante, et sa dérivée

$$f'(x) \equiv \varphi'(x) - \psi'(x),$$

est par suite constamment positive. Comme d'ailleurs cette dérivée ordonnée ne présente qu'une variation, elle ne peut s'annuler pour plus d'une valeur positive α' [1] de x, qui est nécessairement inférieure à α.

Un raisonnement identique montre que

$$f''(x) \equiv \varphi''(x) - \psi''(x)$$

ne peut s'annuler pour plus d'une valeur positive α'' [1] de x, qui est inférieure à α', et à plus forte raison à α.

On conclut de là que les conditions strictement nécessaires et suffisantes, pour l'application de la méthode de Newton (§ 6), se trouveront remplies pour tout nombre supérieur à la plus grande racine de l'équation (11), et si ce nombre ne diffère pas trop de cette racine, on pourra,

---

[1] Cette racine positive α' existe, si $\psi'(x)$ ne se réduit pas identiquement à zéro. Une observation analogue s'applique plus loin à α''.

en le prenant comme premier terme d'une série d'approximations successives, s'approcher rapidement, et aussi près qu'on le voudra, de la racine cherchée.

Cet exemple d'un cas, qui se présente souvent dans la pratique, nous paraît très propre à montrer l'intérêt qui s'attache à laisser à la méthode d'approximation de Newton la plus grande portée possible. Dans bien des cas, en effet, α' et α'', tout en étant inférieurs à α, pourront en différer tellement peu qu'il serait extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, de trouver une limite inférieure de la racine cherchée α qui fût supérieure à α''. Or en s'assujettissant en pareil cas à la règle de Fourier, on se priverait, souvent bien à tort, de l'approximation que donne alors avec certitude la méthode de Newton. La même observation s'applique à l'exemple suivant.

13. *Troisième exemple.* — Soit à résoudre l'équation

$$e^{\alpha x} - ke^{-\beta x} = 0, \tag{12}$$

α, β et k étant des nombres positifs.

Posons

$$f(x) \equiv e^{\alpha x} - ke^{-\beta x}.$$

On en déduit

$$f'(x) \equiv \alpha\ e^{\alpha x} + k\beta\ e^{-\beta x},$$
$$f''(x) \equiv \alpha^2 e^{\alpha x} - k\beta^2 e^{-\beta x}.$$

L'équation (12) a une racine réelle et une seule. En effet $f(-\infty)$ est négatif, $f(+\infty)$ est positif, et, $f'(x)$ étant constamment positif, $f(x)$ croît constamment, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

L'équation

$$\alpha^2 e^{\alpha x} - k\beta^2 e^{-\beta x} = 0, \tag{13}$$

étant de même forme que l'équation (12), a comme elle une racine réelle et une seule. Or il peut arriver que les racines des équations (12) et (13) diffèrent très peu. On pourrait même choisir α et β, de manière que ces deux racines diffèrent aussi peu qu'on le voudrait : la racine de l'équation (13) se rapproche en effet indéfiniment de celle de l'équation (12), lorsque le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ tend vers l'unité. Il sera donc impraticable, dans bien des cas, de trouver deux nombres qui comprennent la racine de l'équation (12) sans comprendre celle de l'équation (13) ; et cependant, contrairement à la stricte interprétation de la règle de Fourier, il sera possible de faire subir la correction de Newton à l'un de ces nombres, et il sera toujours facile, comme on va le voir, de reconnaître celui de ces nombres auquel il conviendra de l'appliquer.

Soient a et $b > a$ deux nombres comprenant la racine p de l'équation (12) et la racine q de l'équation (13), de telle sorte que l'on ait

$$f(a) < 0, \qquad f''(a) < 0, \qquad f(b) > 0, \qquad f''(b) > 0.$$

De l'identité

$$e^{\alpha p} - k e^{-\beta p} = 0$$

tirons la valeur de $e^{-\beta p}$ et portons-la dans $f''(p)$. On obtient

$$f''(p) = (\alpha^2 - \beta^2) e^{\alpha p}.$$

Dans le cas où α est inférieur à β, $f''(p)$ est négatif, q est par suite compris entre p et b, et la correction de Newton s'applique à la limite a.

On voit de même que, quand α est supérieur à β, la méthode de Newton est applicable à la limite b.

14. *Quatrième exemple.* — Considérons l'équation

$$x + \sin x + \operatorname{tang} x = 0, \tag{14}$$

qui a une racine nulle, et dont toutes les autres sont deux à deux égales et de signes contraires. Occupons-nous exclusivement des racines positives et posons

$$f(x) \equiv x + \sin x + \operatorname{tang} x.$$

On déduit de là

$$f'(x) \equiv 1 + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$f''(x) \equiv \frac{\operatorname{tang} x(2 - \cos^3 x)}{\cos^2 x}.$$

La première dérivée $f'(x)$ est toujours positive, car $1 + \frac{1}{\cos^2 x}$ étant toujours supérieur à l'unité est, à plus forte raison, supérieur en valeur absolue à $\cos x$. La fonction $f(x)$ est par suite constamment croissante. D'ailleurs, en désignant par h un entier quelconque et par η un nombre positif suffisamment petit, on voit que, pour $x = (2h - 1)\frac{\pi}{2} + \eta$, $f(x)$ aura le signe de $\operatorname{tang} x$ et sera négatif, tandis que pour $x = (2h + 1)\frac{\pi}{2} - \eta$, $f(x)$, ayant encore le signe de $\operatorname{tang} x$, sera positif. On conclut de là que l'équation (14) a une racine réelle et une seule dans chacun des intervalles limités par $(2h - 1)\frac{\pi}{2}$ et $(2h + 1)\frac{\pi}{2}$, que l'on obtient en remplaçant successivement h par tous les nombres entiers positifs.

On voit de plus que la racine α, correspondant à une valeur déterminée et positive de h, est comprise entre $(2h - 1)\frac{\pi}{2}$ et $h\pi$, car $f(h\pi)$ est égal à $h\pi$ et par consé-

quent positif, alors que $f(x)$, pour $x = (2h-1)\frac{\pi}{2} + \eta$, est négatif.

D'autre part $f''(x)$ ne s'annule, dans l'intervalle considéré, que pour $x = h\pi$, et est négative comme $\operatorname{tang} x$, quand x varie de $(2h-1)\frac{\pi}{2} + \eta$ à $h\pi$. Par conséquent (§ 6), c'est à une limite inférieure de chacune des racines cherchées qu'il conviendra d'appliquer la correction de Newton. On voit aisément d'ailleurs que la racine cherchée, pour chaque valeur de h, diffère peu de $(2h-1)\frac{\pi}{2}$ et en diffère d'autant moins que h est plus grand. La limite inférieure, à laquelle on appliquera la correction de Newton, devra donc être prise peu supérieure à $(2h-1)\frac{\pi}{2}$.

FIN.

16912 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 040942762